

Module de Mathématiques II
Algèbre 2 , Série N° : 1

✓ **Exercice 1.** Montrer que les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par $x \rightarrow \sin(x)$, $x \rightarrow \sin(x^2)$ et $x \rightarrow \sin(x^3)$ forment une famille libre.

✓ **Exercice 2.** Dans \mathbb{R}^3 , soit $u = (-1, 2, 1)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (3, -4, -5)$.

1) Montrer que $\{u, v\}$ est libre et que $\{u, v, w\}$ est liée.

2) Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que $(x, 1, 2) \in \text{Vect}\{u, v\}$.

3) Soit $u' = (1, 0, -3)$, $v' = (-2, 5, 1)$. Montrer que $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u', v'\}$.

4) Que peut on dire de la famille $\{u', v', w\}$.

✓ **Exercice 3.** On considère le système (S)
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble F des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Donner une base de F .

Exercice 4. Dans \mathbb{R}^3 , comparer les sous-espaces F et G suivants : $F = \text{Vect}\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et $G = \text{Vect}\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$.

✓ **Exercice 5.** Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 5 . On définit les ensembles $F = \{P \in E | P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E, (X^2+1) | P\}$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

2) Déterminer une base de F , G et $F \cap G$.

Exercice 6.

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 5z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2. Trouver une base B de F . Quelle est la dimension de F ?

3. Soit $G = \text{Vect}\{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 4, 5)\}$. Déterminer une (ou des) équations cartésiennes de G .

4. Extraire de $\{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 4, 5)\}$ une base B' de G .

5. Extraire de $B \cup B'$ une base de $F + G$.

6. Quelle est la dimension de $F + G$.

7. En déduire la dimension de $F \cap G$.

Exercice 7. Soient les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$ et $v_2 = (2, -1 + i)$ dans \mathbb{C}^2 .

(a) Montrer que le système $\{v_1, v_2\}$ est \mathbb{R} -libre et \mathbb{C} -lié.

(b) Vérifier que le système $S = \{(1, 0); (i, 0); (0, 1); (0, i)\}$ est une base de l'e.v. \mathbb{C}^2 sur \mathbb{R} , et donner les composantes des vecteurs v_1 et v_2 par rapport à cette base.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^n(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E .

Exercice 9. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E tel que: $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - 3e_3$, $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(e_3) = 0_E$. Trouver $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ en précisant une base de chacun de ces sous-espaces.

Exercice 10. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+3} = 2U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n$.

a) Montrer que l'application $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\psi((U_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (U_0, U_1, U_2)$ est un isomorphisme.

b) Chercher les valeurs de $r \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de E . En déduire une expression simple du terme général U_n de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 2 muni de la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$.

1) Montrer que $B' = \{1, 1+X, 1+X^2\}$ est une base de E . Donner les coordonnées de $P = X^2 - 2X + 1$ dans la base B' .

2) Soit $f: E \rightarrow E$ telle que $f(P) = (1 - X^2)P'' + 2P$, où P'' désigne la dérivée seconde du polynôme P .

a/ Montrer que f est une application linéaire.

b/ Déterminer F le noyau de f . Trouver une base de F et compléter cette base en une base de E .

c/ f est-elle injective? surjective? bijective?

d/ Déterminer G l'image de f . Trouver une base de G .

e/ Montrer que F et G sont supplémentaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{th}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{1 - e^{-2u}}{1 + e^{-2u}} \\ \text{th}(0) = 0 \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \text{th}(u) = \frac{e^{2u}}{e^{2u}} = 1 \\ \text{th}'(u) = \frac{\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u}{\text{ch}^4 u} = 1 - \text{th}^2 u = \frac{1}{\text{ch}^2 u} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ch}'(u) = \text{sh}(u) \\ \text{ch}(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \\ \text{sh}'(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \text{ch}(u) \\ \text{sh}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \\ \text{ch}(0) = 1 \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \text{ch}(u) = +\infty \end{array} \right.$$

	0	$+\infty$
$\text{th}(u)$	0	1
$\text{th}'(u)$	1	0

	0	$+\infty$
$\text{ch}(u)$	1	$+\infty$
$\text{ch}'(u)$	0	0

	0	$+\infty$
$\text{sh}(u)$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(u)$	1	0

$$\int \text{Arc th}(u) du = \left[u \text{Arc th}(u) - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) \right]$$

Exercice 1

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin(x)$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin(x^2)$$

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin(x^3)$$

Montrons que (f_1, f_2, f_3) est libre

Soient h_1, h_2, h_3 dans \mathbb{R}

tels que :

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 = 0$$

$$\Rightarrow (h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3)(x) = 0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(h_1 f_1)(x) + (h_2 f_2)(x) + (h_3 f_3)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + h_3 f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h_1 \sin x + h_2 \sin(x^2) + h_3 \sin(x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

on dérive :

$$* \{ h_1 \cos x + 2h_2 x \cos(x^2) + 3h_3 x^2 \cos(x^3) = 0 \} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier pour $x=0$

$$h_1 \cos 0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{h_1 = 0} \quad (\cos 0 = 1)$$

$$* = 2h_2 x \cos(x^2) + 3h_3 x^2 \cos(x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dérivons :

$$2h_2 (\cos(x^2) - 2x^2 \sin(x^2)) + 3(2x \cos(x^3) - 3x^4 \sin(x^3)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier pour $x=0$

$$2h_2 \cos 0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{h_2 = 0}$$

on a montré que $h_1, h_2 = 0$
donc on remplace dans

$$h_1 \sin x + h_2 \sin(x^2) + h_3 \sin(x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{il reste } h_3 \sin(x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pour $x = 1$

$$h_3 \sin(1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{h_3 = 0} \text{ car } \sin 1 \neq 0$$

Exercice 2

dans \mathbb{R}^3

$$u = (-1, 2, 1), \quad v = (0, 1, -1)$$

$\{u, v\}$ est libre

$$\text{si } \alpha u + \beta v = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(-1, 2, 1) + \beta(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (-\alpha, 2\alpha, \alpha) + (0, \beta, -\beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (-\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \rightarrow \beta = 0 \end{cases}$$

$$\text{on a } w = (3, -4, -5)$$

montrons que $\{u, v, w\}$ est liée

on remarque que :

$$(3, -4, -5) = 3(-1, 2, 1) + 2(0, 1, -1)$$

$$= (3, -6, -3) + (0, 2, -2)$$

$$= (3, -4, -5)$$

$$\text{donc } w = -3u + 2v$$

$$-3u + 2v - w = 0$$

$\{u, v, w\}$ est liée

$$3u = -w + 2v$$

$$2) x \in \mathbb{R}$$

$$(x, 1, 2) \in \text{vect}(u, v) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que}$$

$$(x, 1, 2) = \alpha u + \beta v$$

$$(x, 1, 2) = \alpha(-1, 2, 1) + \beta(0, 1, -1)$$

$$= (-\alpha, -2\alpha, \alpha) + (0, \beta, -\beta)$$

$$= (-\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ 1 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha - \beta \end{cases} \rightarrow 3 = 3\alpha \rightarrow \alpha = 1 \quad x = -1$$

$$\beta = 2 - 2\alpha$$

$$\beta = 1 - 2 = -1$$

* Dans \mathbb{R}

$$u = (-1, 2, 1)$$

$$v = (0, 1, -1)$$

$$3) u' = (1, 0, -3)$$

$$v' = (-2, 5, 1)$$

$$\text{vect}(u, v) = \text{vect}(u', v')$$

$$u = \alpha u + \beta v$$

$$(1, 0, -3) = \alpha(-1, 2, 1) + \beta(0, 1, -1)$$

$$= (-\alpha, 2\alpha, \alpha) + (0, \beta, -\beta)$$

$$(1, 0, -3) = (-\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -\alpha \\ 0 = 2\alpha + \beta \\ -3 = \alpha - \beta \end{cases} \rightarrow \alpha = -1$$

$$\beta = \alpha + 3 \rightarrow \beta = 2$$

$$\text{donc } u' = -u + 2v$$

$$\Rightarrow u' \in \text{vect}(u, v)$$

$$* v' = \lambda u + \mu v$$

$$(-2, 5, 1) = \lambda(-1, 2, 1) + \mu(0, 1, -1)$$

$$= (-\lambda, 2\lambda, \lambda) + (0, \mu, -\mu)$$

$$(-2, 5, 1) = \lambda(-1, 2, 1) + \mu(0, 1, -1)$$

$$= (-\lambda, 2\lambda, \lambda) + (0, \mu, -\mu)$$

$$(-2, 5, 1) = (-1, 2\lambda + \mu, \lambda - \mu)$$

$$\begin{cases} -2 = -1 \\ 5 = 2\lambda + \mu \\ 1 = \lambda - \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$v' = 2u + v$$

$$\Rightarrow v' \in \text{vect}\{u, v\}$$

$$\Rightarrow \text{vect}\{u, v\} \in \text{vect}\{u, v\} \quad (1)$$

Montrons que $\text{vect}\{u', v'\} \subset \text{vect}\{u, v\}$

$$\text{Soit } u \in \text{vect}\{u', v'\}$$

$$w = \alpha u' + \beta v' \quad (\alpha, \beta \text{ dans } \mathbb{R})$$

$$= \alpha(-u + 2v) + \beta(2u + v)$$

$$= \underbrace{(-\alpha + 2\beta)}_{\lambda} u + \underbrace{(2\alpha + \beta)}_{\mu} v$$

$$\text{donc } w \in \text{vect}\{u, v\}$$

$$u = ?$$

$$v = ?$$

$$\text{on a } \begin{cases} u' = -u + 2v \\ v' = 2u + v \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = -u + 2v \Rightarrow u' - 2v' = -5u \\ 2v' = 4u + 2v \Rightarrow u = \frac{-1}{5}u' + \frac{2}{5}v' \end{cases}$$

$$\text{donc } u \in \text{vect}\{u', v'\}$$

$$\begin{cases} 2u' = -2u + 4v \\ v' = 2u + v \end{cases}$$

$$2u' + v' = 5v$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{5}u' + \frac{1}{5}v'$$

$$\Rightarrow v \in \text{vect}\{u', v'\} \quad \left(\begin{array}{l} u \in \text{vect}\{u', v'\} \\ v \in \text{vect}\{u', v'\} \end{array} \right) \Rightarrow \text{vect}(u, v) \subset \text{vect}(u', v') \quad (2)$$

$$\text{et } (1) \Rightarrow \text{vect}\{u, v\} = \text{vect}\{u', v'\}$$

$$4) \{u', v', w\} \quad w = (3, -4, 5)$$

$$(3, -4, 5) = 1(-1, 2, 1) + 2(9, 1, -1)$$

$$w = -3u + 2v$$

on a $w \in \text{vect}\{u, v\}$

Mais $\text{vect}\{u, v\} = \text{vect}\{u', v'\}$

donc $w \in \text{vect}\{u', v'\}$

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telle que $w = \lambda u' + \mu v'$

Ex 3

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$F \neq \emptyset$$

$$(0, 0, 0) \in F$$

$$\begin{cases} 0 + 0 - 0 = 0 \\ 0 + 2(0) + 0 = 0 \\ 0 + 3(0) + 0 = 0 \end{cases}$$

Soient $(x, y, z) \in F$; $(x', y', z') \in F$

λ, λ' dans \mathbb{R}

$$\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') \in F$$

$$\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$

1^{ère} ligne

$$(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - (\lambda z + \lambda' z')$$

$$\lambda(x + y - z) + \lambda'(x' + y' - z') = 0$$

2^{ème} ligne

$$(\lambda x + \lambda' x') + 2(\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') = \lambda(x + 2y + z) + \lambda'(x' + 2y' + z') = 0$$

3^{ème} ligne

$$(\lambda x + \lambda' x') + 3(\lambda y + \lambda' y') + 3(\lambda z + \lambda' z') = \lambda(x + 3y + 3z) + \lambda'(x' + 3y' + 3z') = 0$$

donc $(*) \in F$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+2z=0 \\ 2y+4z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+2z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+0-3z=0 \\ y+2z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\text{Si } (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x=3z \text{ et } y=-2z$$

$$F = \{(3\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ = \{\alpha(3, -2, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

donc $\{(3, -2, 1)\}$ engendre F

En plus $\{3, -2, 1\}$ libre

donc $\{3, -2, 1\}$ est une base de F
donc $\dim F = 1$

Ex 4

\mathbb{R}^3

$$F = \text{vect}\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$$

$$G = \text{vect}\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$$

$$(3, 7, 0) = \alpha(2, 3, -1) + \beta(1, -1, -2) \quad \alpha? \beta?$$

$$(3, 7, 0) = (2\alpha, 3\alpha, -\alpha) + (\beta, -\beta, -2\beta)$$

$$\Rightarrow (3, 7, 0) = (2\alpha + \beta, 3\alpha - \beta, -\alpha - 2\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta \\ 7 = 3\alpha - \beta \\ 0 = -\alpha - 2\beta \end{cases} \rightarrow \alpha = -2\beta$$

$$(3, 7, 0) = 2(2, 3, -1) - (1, -1, -2)$$

donc $(3, 7, 0) \in F$

$$(5, 0, -7) = \lambda(2, 3, -1) + \mu(1, -1, -2)$$

$$= (2\lambda, 3\lambda, -\lambda) + (\mu, -\mu, -2\mu)$$

$$(5, 0, -7) = (2\lambda + \mu, 3\lambda - \mu, -\lambda - 2\mu)$$

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda + \mu \\ 0 = 3\lambda - \mu \\ -7 = -\lambda - 2\mu \end{cases}$$

$$\rightarrow \mu = 3\lambda$$

$$5\lambda = 5 \rightarrow \lambda = 1$$

$$\mu = 3$$

$$\Rightarrow (5, 0, -7) = (2, 3, -1) + 3(1, -1, -2)$$

$$\text{donc } (5, 0, -7) \in F$$

$$G \subset F$$

$$\dim F = ?$$

Montrons que $\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ est libre

$$\text{Si } \alpha(2, 3, -1) + \beta(1, -1, -2) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (2\alpha, 3\alpha, -\alpha) + (\beta, -\beta, -2\beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\beta = 3\alpha}$$

$$5\alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$\boxed{\beta = 0}$$

$B = \{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ engendre F
 En plus B est libre

donc B est une base de F .

$$\boxed{\dim F = 2}$$

$$\dim G = ?$$

$$\text{Si } \alpha(3, 7, 0) + \beta(5, 0, -7) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (3\alpha, 7\alpha, 0) + (5\beta, 0, -7\beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (3\alpha + 5\beta, 7\alpha, -7\beta) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 0 \\ 7\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ -7\beta = 0 \rightarrow \beta = 0 \end{cases}$$

dim G = 2

on a montré que $G \subset F$

$$G \subset F$$

$$\text{et } \dim G = \dim F \Rightarrow F = G$$

ou bien on montre que

$$F \subset G$$

$$\left(\begin{array}{l} G \subset F \\ \text{et } F \subset G \end{array} \Rightarrow F = G \right)$$

⊙^F

Exercice 5

$$E = \mathbb{R}_5[X]$$

$$F = \{p \in E \mid p(0) = 0\}$$

$$G = \{p \in E \mid x^2 + 1 \mid p\}$$

$$F \neq \emptyset$$

$$0 \in F$$

$$\text{Si } p = 0 \quad p \in E \text{ et } p(0) = 0$$

$$\text{Soient } p \in F \text{ et } q \in F$$

$$\alpha, \beta \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$\alpha p + \beta q \in F$$

$$\text{on a: } \alpha p + \beta q \in F$$

$$\left(\begin{array}{l} p \in F \text{ et } q \in F \\ \alpha p + \beta q \in F \end{array} \right) \Rightarrow F \text{ est un espace vectoriel}$$

$$\begin{aligned} * (\alpha p + \beta q)(0) &= (\alpha p)(0) + (\beta q)(0) \\ &= \alpha p(0) + \beta q(0) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

F est donc un sev de E

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)$$

$$\beta(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)$$

$G \neq \emptyset$ car $0 \in G$

$$0 = (x^2 + 1) \cdot 0$$

Soient p, q dans G

α, β dans \mathbb{R}

$$\alpha p + \beta q \in G$$

on a $\alpha p + \beta q \in E$ (car $p \in E$

$$q \in E$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{on a : } p = (x^2 + 1)p'$$

$$q = (x^2 + 1)q'$$

$$\alpha p + \beta q = \alpha(x^2 + 1)p' + \beta(x^2 + 1)q'$$

$$\alpha p + \beta q = (x^2 + 1)(\alpha p' + \beta q')$$

Alors $\alpha p + \beta q \in G$

G est donc un sous-ensemble de E

2) $p \in F \Leftrightarrow$ le coefficient constant est égal à 0

$$p = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

$\Rightarrow \{x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ est un système générateur de F

En plus, S est libre car

$$\text{Si } \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \lambda x^4 + \mu x^5 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$\mu = 0$$

donc $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ est une base de F

* Si $p \in G$

$$p(x) = (x^2 + 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$= ax^3(x^2 + 1) + bx^2(x^2 + 1) + cx(x^2 + 1) + d(x^2 + 1)$$

donc $\beta = \{x^3(x^2 + 1), x^2(x^2 + 1), x(x^2 + 1), (x^2 + 1)\}$ est un système générateur de G

En plus Bert libre car

$$\alpha x^3(x^2+1) + \beta x^2(x^2+1) + \gamma x(x^2+1) + \lambda(x^2+1) = 0$$

le coefficient dominant c'est 2.

$$\text{donc } \alpha = 0$$

on remplace

$$\beta x^2(x^2+1) + \dots = 0$$

$$\text{de même } \beta = 0 \quad \gamma = 0 \quad \lambda = 0$$

donc $\{x^3(x^2+1), x^2(x^2+1), x(x^2+1), x^2+1\}$
est une base de G

$$* E = \mathbb{R}_5[X]$$

$$F = \{p \in E / p|0 = 0\}$$

$$G = \{p \in E / x^2+1 \mid p\}$$

une base de $F \cap G$

$$\text{Soit } p \in F \cap G \Leftrightarrow p \in F \text{ et } p \in G$$

$$\text{Si } p \in G \quad p = (x^2+1)(\underbrace{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda}_{\deg \leq 3})$$

$$\text{Si en plus } p \in F \quad d=0$$

$$p \in F \cap G \Leftrightarrow p = (x^2+1)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)$$

$$p = \alpha x^3(x^2+1) + \beta x^2(x^2+1) + \gamma x(x^2+1)$$

$\Rightarrow \{x^3(x^2+1), x^2(x^2+1), x(x^2+1)\}$ est un système
générateur de $F \cap G$.

$$\text{En plus si } \alpha x^3(x^2+1) + \beta x^2(x^2+1) + \gamma x(x^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

on remplace

$$\Rightarrow \{x^3(x^2+1), x^2(x^2+1), x(x^2+1)\} \text{ est libre}$$

donc c'est base de $F \cap G$

Ex 6

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 5z = 0 \}$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$$F \neq \emptyset \text{ car}$$

$$(0, 0, 0) \in F \quad 0 + 2(0) - 5(0) = 0$$

Soient $(x, y, z) \in F, (x', y', z') \in F$
 λ, λ' dans \mathbb{R}

$$\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') \in F$$

on a :

$$\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (\lambda' x', \lambda' y', \lambda' z')$$

$$(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$

$$(\lambda x + \lambda' x') + 2(\lambda y + \lambda' y') - 5(\lambda z + \lambda' z') = \lambda(x + 2y - 5z) + \lambda'(x' + 2y' - 5z')$$

$$+ \lambda'(x' + 2y' - 5z') = 0$$

$$\text{car } (x, y, z) \in F$$

$$\text{car } (x', y', z') \in F$$

2) une base B de F

$$\text{Soit } (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x + 2y - 5z = 0$$

$$x + 2y - 5z = 0$$

$$\Rightarrow x = -2y + 5z$$

$$(x, y, z) = (-2y + 5z, y, z)$$

$$= (-2y, y, 0) + (5z, 0, z)$$

$$= y(-2, 1, 0) + z(5, 0, 1)$$

$$F = \{ y(-2, 1, 0) + z(5, 0, 1) / (y, z) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$B = \{ \underbrace{(-2, 1, 0)}_{e_1}, \underbrace{(5, 0, 1)}_{e_2} \} \text{ engendre } F$$

En plus, si $\alpha(-2, 1, 0) + \beta(5, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow (-2\alpha + 5\beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Alors B est libre, il y a donc une base de F
 $\dim F = 2$

$$3.) G = \text{Vect} \{ (1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 4, 5) \}$$

Soit $(x, y, z) \in G \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ dans \mathbb{R} telle que

$$(x, y, z) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, -1) + \gamma(1, 4, 5)$$

$$(\alpha, 2\alpha, \alpha) + (\beta, \beta, -\beta) + (\gamma, 4\gamma, 5\gamma) = (x, y, z)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma, 2\alpha + \beta + 4\gamma, \alpha - \beta + 5\gamma) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ 2\alpha + \beta + 4\gamma = y \\ \alpha - \beta + 5\gamma = z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & 4 & y \\ 1 & -1 & 5 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 2 & y-2x \\ 0 & -2 & 4 & z-x \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -2 & 2x-y \\ 0 & 2 & -4 & x-z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -x+y \\ 0 & 1 & -2 & 2x-y \\ 0 & 0 & 0 & -x+y-z \end{array} \right)$$

Il faut que $0 = -x + y - z$

$$-x + y - z = 0$$

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, -1) + \gamma(1, 4, 5) = (0, 0, 0) \\ \alpha + \beta + \gamma, 2\alpha + \beta + 4\gamma, \alpha - \beta + 5\gamma = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{el } (1, 4, 5) = 3(1, 2, 1) - 2(1, 1, -1)$$

$$\downarrow$$

$$(3, 6, 3) - (2, 2, -2)$$

$$(1, 4, 5)$$

u) Si $w \in G$ $w = \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, -1) + \gamma(1, 4, 5)$
 $= \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, -1) + \gamma[3(1, 2, 1) - 2(1, 1, -1)]$
 $= (\alpha + 3\gamma)(1, 2, 1) + (\beta - 2\gamma)(1, 1, -1)$
 $\Rightarrow \{(1, 2, 1), (1, 1, -1)\} \overset{\mu}{\Rightarrow} \text{générateurs}$

$$B = \{(1, 2, 1), (1, 1, -1)\} \text{ est une base de } G$$

$$\dim G = 2$$

v) Si $w \in F + G$

donc $w = u + v$ $u \in F, v \in G$

$$\Rightarrow = \alpha(-2, 1, 0) + \beta(5, 0, 1) + \gamma(1, 2, 1) + \delta(1, 1, -1)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans \mathbb{R}

$$\Rightarrow \{(-2, 1, 0), (5, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 1, -1)\}$$

engendre $F + G$

$$\text{Si } \alpha(-2, 1, 0) + \beta(5, 0, 1) + \gamma(1, 2, 1) + \delta(1, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$(-2\alpha + 5\beta + \gamma + \delta, 2 + 2\gamma + \delta, \beta + \gamma - \delta) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} -2\alpha + 5\beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + 2\gamma + \delta = 0 \\ \beta + \gamma - \delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma + \delta = 0 \\ \beta + \gamma - \delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{(-2, 1, 0), (5, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ est libre

et $(1, 2, 1) = 2(-2, 1, 0) + (5, 0, 1)$

$\Rightarrow \{(-2, 1, 0), (5, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ est une base de $F + G$

\therefore on a

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

$$\Rightarrow \dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G$$

$$= 2 + 2 - 3$$

$$\Rightarrow \dim F \cap G = 1$$

on a : $(1, 2, 1) \in G$

Mais $(1, 2, 1) = 2(-2, 1, 0) + (5, 0, 1)$

donc $(1, 2, 1) \in F$

$$\text{or } F \cap G = 1$$

$\{(1, 2, 1)\}$ est une base $F \cap G$

Ex7

$$v_1 = (1-i, i) \quad v_2 = (2, -1+i)$$

Si $\alpha(1-i, i) + \beta(2, -1+i) = (0, 0)$ α, β dans \mathbb{R}

$$\Rightarrow (\alpha - \alpha i, \alpha i) + (2\beta, -\beta + i\beta) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha + 2\beta - \alpha i, -\beta + (\alpha + \beta)i) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} (\alpha + 2\beta) - \alpha i = 0 \\ -\beta + (\alpha + \beta)i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ -\beta = 0 \rightarrow \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..